

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12a

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950, 3a;

Asymptotische ontwikkelingen met behulp van de Laplace-
integraal.

B.J. de Jong



1949

Asymptotische Ontwikkelingen met behulp van de Laplace-integraal.

In hoofdstuk III over Laplace-integralen (zie voor de definitie en aannamen omtrent de objectfunctie het begin van dat hoofdstuk) is bewezen (pag. 27, stelling 10):

Indien $\mathcal{L}(F) \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ een halfvlak van voorwaardelijke convergentie bezit en

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} t^{-\beta} F(t) = B(\beta > -1),$$

dan nadert $s^{\beta+1} \mathcal{L}(F)$ tot $B \Gamma(\beta+1)$,
als $|s|$ onbegrensd aangroeit met $|\arg s| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

Uit deze stelling is onmiddellijk een stelling af te leiden, die uit een asymptotische ontwikkeling van de objectfunctie $F(t)$ bij $t = 0$ concludeert tot een asymptotische ontwikkeling van de resultaatfunctie $\mathcal{L}(F)$ voor $s \rightarrow \infty$:

Stelling 1.: Indien $\mathcal{L}(F)$ een halfvlak van voorwaardelijke convergentie bezit, dan volgt uit

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda_n} \quad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty)$$

bij $t = 0$, d.w.z.

$$t^{-\lambda_{n+1}} \left(F(t) - \sum_{v=0}^n c_v t^{\lambda_v} \right) \rightarrow c_{n+1} \quad \text{voor } t \rightarrow 0 \text{ en}$$

iedere niet-negatieve n)

de ontwikkeling

$$\mathcal{L}(F) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{s^{\lambda_n+1}}$$

voor onbegrensd toenemende $|s|$ met $|\arg s| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, d.w.z.

$$s^{\lambda_{n+1}+1} \left(\mathcal{L}(F) - \sum_{v=0}^n c_v \frac{\Gamma(\lambda_v+1)}{s^{\lambda_v+1}} \right) \rightarrow c_{n+1} \Gamma(\lambda_{n+1}+1)$$

voor iedere niet-negatieve gehele n .

Voor het bewijs hoeft men de vorige stelling slechts toe te passen op

$$F(t) - \sum_{v=0}^n c_v t^{\lambda_v} \quad \text{i.p.v. op } F(t) \quad \text{met } \beta = \lambda_{n+1}, \text{ en } B = c_{n+1}.$$

Tot nu toe is t reëel ondersteld. Om stelling 1 onder zekere aannamen uit te breiden tot complexe t , generaliseren we de Laplace-integraal door een complexe integratieweg toe te laten. Eerst bewijzen we nog:

Stelling 2: $f(s) = \mathcal{L}(F)$ is in het inwendige van het convergentie-halfvlak analytisch en er geldt:

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-st} t^k F(t) dt.$$

Voor het bewijs leiden we een aantal lemma's af:

Lemma 1.: $f_\alpha(s) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} F(t) dt \ (\alpha > 1)$

is een gehele functie en

$$f_\alpha^{(k)}(s) = (-1)^k \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} t^k F(t) dt. \quad (k=1, 2, \dots).$$

Wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!}$ op het integratie-interval is

$$f_\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (-t)^n F(t) dt.$$

Elke term van deze reeks is een gehele functie en de reeks convergeert in ieder begrensde gebied gelijkmatig, dus is $f_\alpha(s)$ geheel en

$$f_\alpha^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (-t)^n F(t) dt = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} (-t)^k F(t) dt$$

Lemma 2. $\mathcal{L}(F)$ convergeert in ieder begrensde gebied binnen het convergentie-halfvlak gelijkmatig aan de bovengrens.

Dit lemma is bevat in de hulpstelling van hoofdstuk III pag. 23, waar de gelijkmatige convergentie zelfs bewezen wordt in elke hoek $|\arg(s - s_0)| < \frac{\pi}{2}$ als s_0 een convergentiepunt van de integraal is.

Lemma 3. $\mathcal{L}(F)$ convergeert in ieder halfvlak $\Re s > \sigma$ (dus zeker in ieder begrensde gebied) gelijkmatig aan de benedengrens.

Omdat van $F(t)$ verondersteld is, dat ze aan de benedengrens absoluut-oneigenlijk integreerbaar is, is $\int_a^b |F(t)| dt$ willekeurig klein te maken, als $b > a > 0$ voldoende klein is. Maar dan is, wegens de in het halfvlak geldende ongelijkheid $|\int_a^b e^{-st} F(t) dt| \leq e^{-\sigma b} \int_a^b |F(t)| dt$, het linkerlid willekeurig klein te maken.

Om nu het bewijs van stelling 2 te geven, slaan we om elk willekeurig punt van het inwendige van het convergentiehalfvlak van $f(s)$ een binnen het halfvlak gelegen cirkel, waarin dus op grond van de lemma's 2 en 3 gelijkmatig geldt: $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_\alpha(s) = f(s)$. Op grond van de dubbelreeksenstelling van Weierstrass en lemma 1 is $f(s)$ binnen het cirkeltje analytisch en geldt:

$$f^{(k)}(s) \text{ bestaat en } f^{(k)}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_\alpha^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-st} t^k F(t) dt$$

q.e.d.

We bewijzen nu:

Stelling 3. Is $F(t) = O(e^{a|t|})$ ($a \geq 0$) voor $t \rightarrow \infty$ in $\alpha < \arg t < \beta$ ($\beta - \alpha < \pi$) en is $F(t)$ daar regulier (behalve eventueel in $t = 0$ en $t = \infty$, als $F(t)$ dan maar langs iedere straal naar $t = 0$ absoluut integreerbaar is), dan convergeert de gegeneraliseerde Laplace-integraal $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ ($\alpha < \varphi < \beta$) minstens voor $\Re(e^{i\varphi} s) > a$, daar analytisch. Voorts zijn alle functies $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ elementen van zelfde analytische functie.

Substitutie van $t = re^{i\varphi}$ (r reëel) in $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ geeft:

$$e^{i\varphi} \int_0^\infty e^{-e^{i\varphi}sr} F(re^{i\varphi}) dr.$$

Wegens $|F(t)| < Ae^{ar}$ (hetgeen uit het gegeven volgt), convergeert deze integraal minstens voor $\Re(e^{i\varphi}s) > \alpha$ en wel absoluut. Volgens stelling 2 is $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ daar analytisch.

Beschouw nu de punten $T_1 = Re^{i\varphi_1}$ en $T_2 = Re^{i\varphi_2}$ (R reëel) met $\alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \beta$. Volgens de stelling van Cauchy is

$$\int_0^{T_2} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{T_1} e^{-st} F(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} F(t) dt.$$

(De integratiweg bij het eerste tweetal integralen zij rechtlijnig, die bij de derde zij de boog van de cirkel $|t| = R$).

Voor $R \rightarrow \infty$ nadert de eerste integraal tot $\mathcal{L}^{(\varphi_1)}(F)$, de tweede tot $\mathcal{L}^{(\varphi_2)}(F)$. De derde integraal nadert tot nul voor alle punten s , die op het in beide halfvlakken $\Re(e^{i\varphi_1}s) > \alpha$ en $\Re(e^{i\varphi_2}s) > \alpha$ gelegen deel van de bisectrice van de begrenzingsrechten dezer halfvlakken gelegen zijn: Immers voor die punten geldt:

$$\arg s = \frac{-\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \text{en} \quad |s| \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} > \alpha$$

en wegens $\Re(st) = |s| R \cos(\varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \geq |s| R \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ is:

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} F(t) dt \right| \leq R(\varphi_2 - \varphi_1) e^{-|s| R \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} \cdot A e^{-\alpha R} = A(\varphi_2 - \varphi_1) e^{-R(|s| \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \alpha)}$$

Voor de beschouwde punten s nu, is de coëfficiënt van $-R$ in de exponent positief, dus nadert het rechterlid van de laatste ongelijkheid tot nul voor $R \rightarrow +\infty$. Twee willekeurige integralen $\mathcal{L}^{(\varphi_1)}(F)$ en $\mathcal{L}^{(\varphi_2)}(F)$ stemmen dus op een halve rechte overeen en zijn dus elementen van dezelfde analytische functie.

Bewijzen we nu de uitbreiding van stelling 1:

Stelling 4: Voldoet $F(t)$ aan de voorwaarden van stelling 3 en geldt bovendien

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda_n} \quad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty)$$

voor $|t| \rightarrow 0$ bij vast $\arg t$ met $\alpha < \arg t < \beta$, dan geldt voor de in $-\beta - \frac{\pi}{2} < \arg s < -\alpha + \frac{\pi}{2}$ door $f(s) = \mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$, ($\alpha < \varphi < \beta$) gedefinieerde functie:

$$f(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n + 1)}{s^{\lambda_n + 1}} \quad \text{voor } s \rightarrow \infty$$

gelijkmatig in $-\beta - \frac{\pi}{2} + \delta < \arg s < -\alpha + \frac{\pi}{2} - \delta$, bij iedere $\delta > 0$.

Stelt men $t = re^{i\varphi}$ (r reëel) ($\alpha < \varphi < \beta$), dan is

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = e^{i\varphi} \int_0^{\infty} e^{-se^{i\varphi} r} F(re^{i\varphi}) dr$$

en $F(re^{i\varphi}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n \varphi} r^{\lambda_n}$.

Toepassing van stelling 1 geeft:

$$f(s) \sim e^{i\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n \varphi} \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{(se^{i\varphi})^{\lambda_n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{s^{\lambda_n+1}}$$

voor $|s| \rightarrow \infty$ met $-\varphi - \frac{\pi}{2} + \delta < \arg s < -\varphi + \frac{\pi}{2} - \delta$ ($\delta > 0$)

Dit geldt voor iedere φ met $\alpha < \varphi < \beta$ zodat de ontwikkeling geldt in $-\beta < \frac{\pi}{2} + \delta < \arg s < -\alpha + \frac{\pi}{2} - \delta$ ($\delta > 0$)

Syllabus Colloquium Asymptotische Ontwikkelingen

Spreker: B.J. de Jong, Kinderdijkstr.16 - Asd.Zd.

Een toepassing van stelling 4 vinden we in:

de reeks van Stirling voor $\log \Gamma(s)$ We beschouwen de voor $\operatorname{Re} s > 0$ reguliere functie

$$f(s) = \log \Gamma(s) - s \log s + \frac{1}{2} \log s + s - \frac{1}{2} \log 2\pi$$

en we veronderstellen bekend, dat

$$f(s) \rightarrow 0 \text{ voor } s \rightarrow +\infty \text{ (s reëel).}$$

Volgens Hoofdstuk III, pag.23, stelling 3 is dit zeker noodzakelijk, opdat $f(s)$ een Laplace-getransformeerde zij.Uit $f'(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \log s + \frac{1}{2s}$ en

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{s} \quad (\text{volgt door differentiëren uit } \Gamma(s+1) = s\Gamma(s))$$

volgt, dat $f(s)$ voldoet aan de differentievergelijking

$$y'(s+1) - y'(s) = -\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \quad (1)$$

Voldoet ook $g(s)$ aan deze vergelijking, dan geldt,als we $g(s) - f(s) = v(s)$ stellen,

$$v'(s+1) - v'(s) = 0 \text{ en dus } v(s+1) - v(s) = c.$$

Slechts als $v(s) \equiv 0$ is, geldt $g(s) \rightarrow 0$ voor $s \rightarrow +\infty$ (s reëel).Van alle functies, die aan (1) voldoen, kan dus $f(s)$ slechts eenLaplace getransformeerde zijn. Veronderstel nu, dat er inderdaad een $F(t)$ is met $f(s) = L(F(t))$. Volgens stelling 2 is dan $f'(s) = L\left\{-te^{-t}F(t)\right\}$ Verder ziet men gemakkelijk in dat $f'(s+1) = L\left\{-te^{-t}F(t)\right\}$ Voorts is $\frac{1}{s} = L(1)$ en $\frac{1}{s+1} = L(e^{-t})$ en $\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) = L\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)$.

(Het laatste verifiëert men door het linkerlid in een reeks te ontwikkelen, en termsgewijze de bijbehorende objectfunctie te bepalen).

Dus moet $F(t)$ voldoen aan

$$-te^{-t}F(t) + tF(t) = -\frac{1-e^{-t}}{t} + \frac{1}{2}(1 + e^{-t}), \text{ zodat}$$

$F(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right)$. Deze functie heeft als singulariteiten slechts polen en wel in $t = 2k\pi i$ ($k = \dots, -2, -1, +1, +2, \dots$) en is dus in 't bijzonder in $\{(\arg t) | < \pi/2\}$ regulier. Hier geldt zeker $F(t) = O(e^{-\varepsilon t})$ voor $t \rightarrow \infty$ voor iedere $\varepsilon > 0$. Volgens stelling 3

3 heeft $F(t)$ dus een L.-getransformeerde en deze moet aan (1) voldoen, zodat dus inderdaad $f(s) = L(F)$.

In de omgeving van de oorsprong is $F(t)$ (die een even functie is) in een machtreeks te ontwikkelen.

De ontwikkeling definieert juist de getallen van Bernoulli B_{2n} :

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2(n-1)}$$

Volgens stelling 4 geldt dus in $|\arg s| < \pi$ en gelijkmatig in

$$|\arg s| < \pi - \delta \quad (\delta > 0):$$

$$f(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n-1)(2n)} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}} \quad \text{ofwel}$$

$$\log \Gamma(s) \sim s \log s - \frac{1}{2} \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}}$$

voor $s \rightarrow \infty$.

Een toepassing van stelling 1 is:

de asymptotische ontwikkeling van de Bessel-functies voor groot argument.

$$\text{Gaan we b.v. uit van } J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\text{I.v.m. } \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = B\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi, \text{ is}$$

$$J_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\frac{1}{2}) 2^{2n}} (x \cos \varphi)^{2n} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \varphi) d\varphi$$

Substitutie van $z = \cos \varphi$ geeft:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xz)}{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{ixz}}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

Zet men $x = is$ en $z = t-1$, dan krijgt men:

$$J_0(is) = \frac{e^{xs}}{\pi} \int_0^2 e^{-st} [t(2-t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\text{Uit de ontwikkeling } [t(2-t)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2^n \cdot n!} t^{n+\frac{1}{2}}$$

in de omgeving van $t = 0$,

en stelling 1 volgt:

$$\pi e^{-s} J_0(is) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

voor $s \rightarrow \infty$ in $|\arg s| < \pi$

$$\text{of wel } J_0(x) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \cdot \frac{e^{-ni\frac{\pi}{2}}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{x^n} \right) \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x}}$$

voor $x \rightarrow \infty$ in $0 < \arg x < \pi$ gelijkmatig in

$$0 < \arg x < \pi - \delta$$

Om een ontwikkeling voor positieve x te vinden, schrijven we:

$$\pi e^{-s} J_0(is) = \int_0^{1+i} e^{-st} [t(2-t)]^{\frac{1}{2}} dt + \int_{1+i}^2 e^{-st} [t(2-t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$f_1(s) + f_2(s).$$

Voor $f(s)$ vinden we dezelfde ontwikkeling als (1):

$$f(s) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}} \quad (2),$$

echter nu voor $s \rightarrow \infty$ in $\frac{3}{4}\pi < \arg s < \frac{5}{4}\pi$

Substitutie van $t = 2 + u$, daarna $u = re^{i\varphi}$

met $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ in de integraal voor $f_2(s)$ geeft:

$$f_2(s) = -e^{i(\varphi+\pi/2)} \cdot e^{-2s} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-se^{i\varphi}r} \left[re^{i\varphi}(2+re^{i\varphi}) \right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

Uit de ontwikkeling

$$\left[re^{i\varphi}(2+re^{i\varphi}) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}{n! 2^n} e^{i(n-\frac{1}{2})\varphi} r^{n-\frac{1}{2}}$$

in de omgeving van $r = 0$, en stelling 1 volgt:

$$f_2(s) \sim -\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2\pi}s} e^{-2s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{s^n} \quad (3)$$

voor $s \rightarrow \infty$ in $-\frac{5}{4}\pi < \arg s < -\frac{3}{4}\pi$

Optelling van (2) en (3) geeft een ontwikkeling van $\pi e^{-s} \gamma_0(is)$ die zeker op de negatieve imaginaire as geldig is.

Substitutie van $x = is$ geeft de ontwikkeling, die zeker op de positieve reële as geldig is:

$$J_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{\cos(x - \pi/4 + n \cdot \pi/2)}{x^n}$$

Omdat $J_0(x)$ even is, is nu dus voor alle x een asymptotische ontwikkeling afgeleid.

Een toepassing van stelling 4 is neg:

de asymptotische ontwikkeling van de foutenfunctie van Gauss

Uit: $L(\frac{1}{2} e^{-t^2/4}) = e^{-s^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ (waarbij de integratieweg evenwijdig met de positieve reële as is),

en de ontwikkeling $\frac{1}{2} e^{-t^2/4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!}$ bij $t = 0$

en $e^{-t^2/4} = o(1)$ voor $|\arg t| \leq \alpha < \pi/4$

en stelling 4 volgt:

$$e^{-s^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n! s^{2n+1}} \quad \text{voor } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arg s| \leq \frac{3}{4}\pi$$

Enige omvorming en $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ geeft:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \sim 1 - \frac{1}{\pi} e^{-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}{s^{2n+1}} \quad \text{voor reële } s \rightarrow +\infty$$

Indien $f(s) = L(F(t))$, kan men onder zekere voorwaarden omgekeerd

de objectfunctie $F(t)$ in de resultaatfunctie $F(s)$ uitdrukken:

$F(t) = L^{-1} \{ f(s) \}$ en nu uit het asymptotisch gedrag van $f(s)$ tot het

gedrag van $F(t)$ besluiten. Vele der omkeerformules berusten op het

integraaltheorema van Fourier, dat we bekend veronderstellen:

Stelling 5: Is $G(t)$ in ieder eindig interval integreerbaar en bestaat

$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)| dt$, dan geldt in ieder punt, waarbij een omgeving aan te geven is, waarin $G(t)$ van begrensde variatie is:

$$\frac{G(t+0) + G(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} \gamma d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} G(\tau) d\tau$$

Met $G(t) = 0$ voor $t \leq 0$ en $G(t) = e^{-xt} F(t)$ voor $t > 0$

geeft dit, zo men $x+i y = s$ stelt:

Stelling 6: Convergeert $\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$ voor $x > \sigma$ absoluut, dan geldt in ieder punt, waarbij een omgeving aan te geven is, waarbij $F(t)$ van begrensde variatie is:

$$\frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} = \frac{e^{xt}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\gamma} f(x+i\gamma) d\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (x > \sigma)$$

Stelling 7: Is $L(F)$ voor $s = s_0$ convergent, dan geldt:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds \quad (x > \sigma_{s_0})$$

met $\phi(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$

Volgens Hoofdstuk III pag. 20 is voor $\sigma_s > \sigma_{s_0}$

$$\frac{L(F)}{s-s_0} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{s_0 t} \phi(t) dt$$

De integraal uit het rechterlid convergeert voor $\sigma_s > \sigma_{s_0}$ absoluut, we-

gens de begrensdeheid van $\phi(t)$ (die uit de onderstelde convergentie van $\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} F(t) dt$ volgt). Toepassing van stelling 6 op $e^{-s_0 t} \phi(t)$, hetgeen een continue functie is, geeft het te bewijzen.

Stelling 8: Is $L(F)$ voor $s = s_0$ convergent en is $F(t)$ voor $t \geq A$

continu, terwijl $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s) ds$ met zekere $x_0 > \sigma_{s_0}$

voor alle $t \geq A$ convergeert en in ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig, dan geldt voor $t \geq A$:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s) ds$$

σ_s

Op grond van de gelijkmatige convergentie is $G(t)$ in ieder interval

$A \leq t \leq T$ continu en geldt er:

$$\int_A^T e^{-st} G(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} f(s) ds \int_A^T e^{t(s-s_0)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} \frac{e^{T(s-s_0)} - e^{A(s-s_0)}}{s-s_0} f(s) ds = \int_A^T e^{-s_0 t} F(t) dt,$$

op grond van stelling 7.

Dit geldt voor iedere $T \geq A$. Wegens de continuïteit van $G(t)$ en $F(t)$

voor $t \geq A$ geldt voor $t \geq A$:

$$F(t) = G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s) ds, \text{ q.e.d.}$$

Toepassing van Hoofdstuk III stelling 5, pag.23 geeft:

Stelling 9: Is $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} f(x+iy) dy$ voor $t \geq A$ gelijkmatig convergent, dan geldt: $I \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

Toepassing van de stellingen 8 en 9 geeft:

Stelling 10: Is $L(F)$ voor $s=s_0$ convergent en is $F(t)$ voor $t \geq A$ continu, terwijl $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} f(x_0 + iy) dy$ met zekere $x_0 > R_{s_0}$ voor alle $t \geq A$ gelijkmatig convergeert, dan is:

$$F(t) = o(e^{xt}) \text{ voor } t \rightarrow \infty$$

Alvorens deze stelling uit te breiden, leiden we af een

Hulpstelling: Convergeert $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} g(y) dy$ gelijkmatig voor $t \geq A > 0$ en geldt $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$ voor $y \rightarrow \infty$, dan convergeert $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} g(y) dy$ en wel gelijkmatig voor $t \geq A > 0$.

Bewijs:

$$\text{Uit } \int_a^b e^{ity} g(y) dy = \frac{1}{it} e^{ity} g(y) \Big|_a^b - \frac{1}{it} \int_a^b e^{ity} g'(y) dy$$

volgt voor $t \geq A$:

$$\left| \int_a^b e^{ity} g(y) dy \right| \leq \frac{1}{A} \left(|g(a)| + |g(b)| + \left| \int_a^b e^{ity} g'(y) dy \right| \right)$$

Het rechterlid is, onafhankelijk van t , willekeurig klein, mits a en b maar voldoende groot zijn.

Opmerking: Een analoge stelling geldt bij $y = -\infty$

We breiden nu stelling 10 a.v. uit:

Stelling 11: Onder de aannamen:

- 1) $f(s) = L(F)$ is voor $s = s_0$ convergent
- 2) $F(t)$ is voor $t \geq A$ continu.
- 3) $f(s)$ is in $R_{s_0} > a$ ($a \leq R_{s_0}$) analytisch en $f(s)$ heeft voor $R_{s_0} \rightarrow a$ nog randwaarden $f(a+iy)$, zodat $f(s)$ in $R_{s_0} \geq a$ continu is.
- 4) $f_y^{(n)}(a+iy), f_y^{(n)}(a+iy), \dots, f_y^{(n)}(a+iy)$ bestaan en $f_y^{(n)}(a+iy)$ is in ieder eindig interval integreerbaar
- 5) $f_y^{(k)}(a+iy) \rightarrow 0$ voor $y \rightarrow \pm \infty$ ($k=0, 1, \dots, n-1$)
- 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f_y^{(n)}(a+iy) dy$ convergeert voor $t \geq A$ gelijkmatig
- 7) $\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s) ds$ en $\int_{x_0+i\infty}^{x_0-i\infty} e^{ts} f(s) ds$ naderen met

gelijkmatig tot nul voor $\omega \rightarrow \infty$,

geldt: $F(t) = o(t^{-n} e^{-at})$ voor $t \rightarrow \infty$

Bewijs: Voor $k = n$ volgt uit

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy) dy = \left[\frac{1}{it} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy) \right]_{-\omega}^{+\omega} - \frac{1}{it} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} f^{(k)}(a+iy) dy$$

wegens 5) en 6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy) dy = -\frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(k)}(a+iy) dy$$

en wegens 6) en de hulpstelling convergeert ook de integraal uit het linkerlid gelijkmatig voor $t \geq A$.

De laatste betrekking is nu achtereenvolgens ook voor

$k = n-1, \dots, 2, 1$ te bewijzen, zodat tenslotte geldt:

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(a+iy) dy = (-\frac{1}{it})^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(n)}(a+iy) dy$, waarbij ook de integraal uit het linkerlid gelijkmatig voor $t \geq A$ convergeert.

Nu is $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(a+iy) dy = \frac{e^{-at}}{2\pi i} \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} e^{its} f(s) ds$, waarbij de laatste integraal in ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig convergeert en wegens

7) en de wegens 3) toepasbare uitbreiding van de integraalstelling van Cauchy (waarbij de functie op de integratieweg zelf slechts continu ondersteld wordt) gelijk is aan $\frac{e^{-at}}{2\pi i} \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} e^{its} f(s) ds$. De laatste integraal convergeert weer in

ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig en dus geldt op grond van

1) en 2) en stelling 8 voor $t \geq A$:

$$2\pi e^{-at} F(t) = \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} e^{its} f(s) ds = 2\pi (-\frac{1}{it})^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(n)}(a+iy) dy,$$

op grond van het eerder bewezene.

Wegens 6) en stelling 9 nadert de integraal uit het laatste lid tot nul voor $t \rightarrow \infty$, waarmee het gestelde bewezen is.